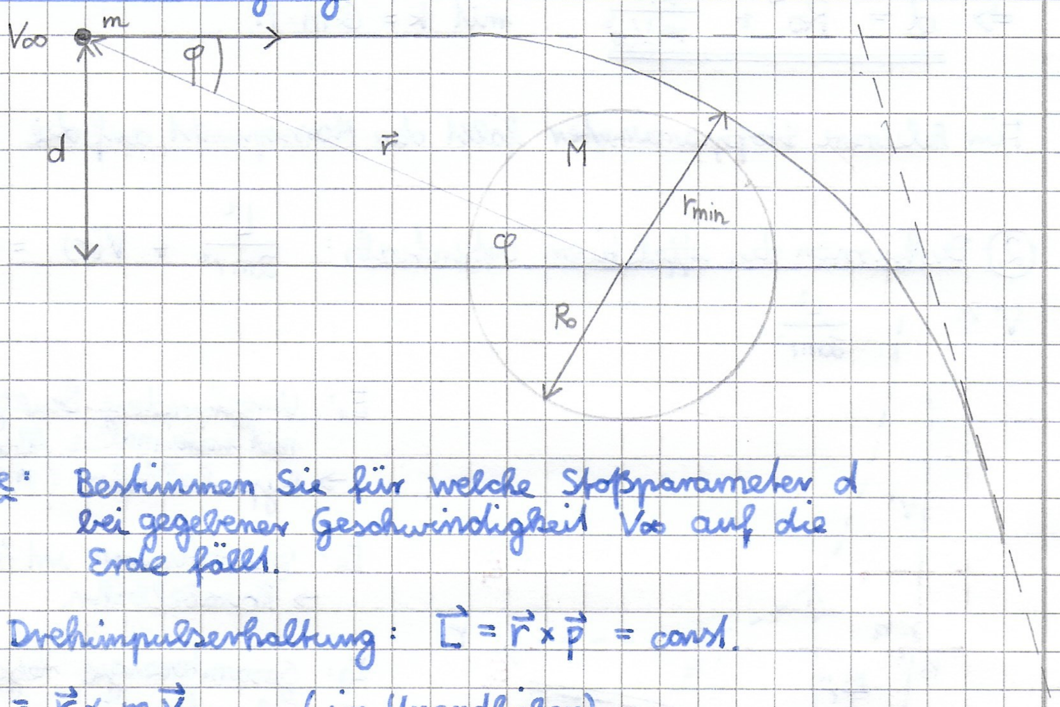
4. Tutorium – Theoretische Mechanik

Effektives Potential im Gravitationsfeld: siehe ③ des letzten Tutoriums.

Es ergab sich: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ (1)

① Ungebundene Bewegung:



Aufgabe: Bestimmen Sie für welche Stoßparameter d bei gegebener Geschwindigkeit V_∞ auf die Erde fällt.

Es gilt Drehimpulserhaltung: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const.$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V}_\infty$ (im Unendlichen)

$\Rightarrow |\vec{L}| = m\,|\vec{r}|\cdot|\vec{V}_\infty|\cdot \sin\varphi$ mit $\sin\varphi = \frac{d}{|\vec{r}|}$

$\Rightarrow \underline{L = m\cdot d\cdot V_\infty} = const.$

Es gilt auch Energieerhaltung: $E_{ges} = E_{kin\,\infty} = \frac{m}{2}V_\infty^2 = const.$

nach (1) gilt: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ *

Am Punkt r_{min} wird das effektive Potential maximal und die Radialgeschwindigkeit verschwindet (Extremum des Radialabstands)

$\Rightarrow E = \frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{k}{r_{min}}$ mit $E = \frac{m}{2}V_\infty^2$

$\Rightarrow r_{min}^2 E + k\,r_{min} - \frac{L^2}{2m} = 0$

$\Rightarrow r_{min}^2 + \frac{k}{E}r_{min} - \frac{L^2}{2Em} = 0$ Quadratische Gleichung

$\Rightarrow r_{min} = -\frac{k}{2E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2Em}}$

$\Rightarrow r_{min} = \frac{-k}{mV_\infty^2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2V_\infty^4} + \frac{m^2d^2V_\infty^2}{m^2V_\infty^2}}$

$r_{min} = \frac{-k}{mV_\infty^2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2V_\infty^4} + d^2}$ betrachte nur positive Lösung, da $r_{min} > 0$

* Potential einer Punktmasse ↗ Tut. 3 ④

Setze nun $r_{min} = R_0$ und stelle nach d um

$$R_0 = -\frac{k}{m v_\infty^2} + \sqrt{\frac{k^2}{m^2 v_\infty^2} + d^2} \quad \Big| + \frac{k}{m v_\infty^2} ; (\ldots)^2$$

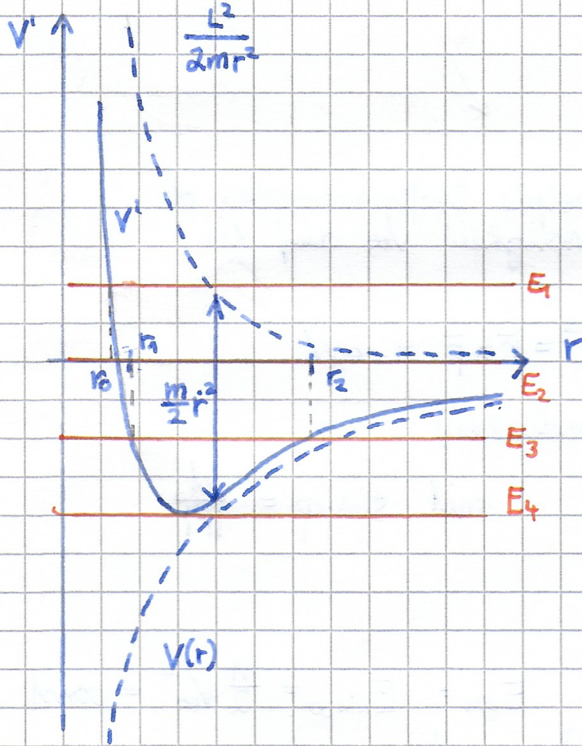
(Plausibilität: für $d=0$ ist $r_{min}=0$, was zu erwarten ist.)

$$\left(R_0 + \frac{k}{m v_\infty^2}\right)^2 = \frac{k^2}{m^2 v_\infty^2} + d^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d = \sqrt{R_0^2 + \frac{2k}{m v_\infty^2}}}} \quad \text{mit } k = G \cdot m \cdot M$$

Für kleinere Stoßparameter fällt der Massepunkt auf die Erde.

② Diskussion des effektiven Potentials: $\frac{L^2}{2mr^2} + V(r) =: V'(r)$



E_1: Ungebundene Bewegung mit minimalen Abstand r_0
→ Hyperbelbahn (↗ ①)

E_2: Gesamtenergie ist Null
→ Parabelbahn

E_3: Gesamtenergie negativ
Gebundene Bewegung zwischen r_1 und r_2
→ Ellipsenbahn im $\frac{1}{r}$ Potential

E_4: Gebundene Bewegung bei einem Abstand r
→ Kreisbewegung

③ Virialsatz: Beschreibt den Zusammenhang der Zeitmittelwerte von kinetischer Energie T und Potentieller Energie V.

Motivation: Kreisbewegung eines Teilchens im Zentralkraftfeld

Gravitationskraft = Zentripetalkraft: $\frac{mM \cdot G}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Big| \cdot \frac{r}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mMG}{r}}_{-E_{pot}} = \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{E_{kin}}$$

$$\Rightarrow E_{kin} = -\frac{1}{2}E_{pot} \quad \text{bzw.} \quad T = -\frac{V}{2}$$

$$\Rightarrow E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}E_{pot}$$

4. Tutorium - Theoretische Mechanik

③ Herleitung des Virialsatzes:

Wir betrachten ein System aus Massepunkten m_i und definieren die Größe G als Summe der Skalarprodukte von $\vec{p}_i$ und $\vec{r}_i$

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \qquad \text{Newton I: } \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \underbrace{\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i}_{\overset{*}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} + \underbrace{\sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{= \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T}$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T$$

Man bildet nun den Zeitmittelwert dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} \, dt = \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} + \overline{2T}$$

$$\frac{1}{\tau} \left(G(\tau) - G(0) \right) = \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{F}_i} + \overline{2T}$$

Ist die Bewegung periodisch, lässt sich ein τ wählen, für das die linke Seite verschwindet.
Andernfalls muss man annehmen, dass $\vec{r}_i$ und $\vec{p}_i$ für alle Zeiten und für alle Teilchen endlich bleibt.

Dann gilt im Limes: $\lim\limits_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \big(\underbrace{G(\tau) - G(0)}_{\text{endlich}} \big) = 0$

Geht man nun von konservativen Kräften aus $-\vec{\nabla} V = \vec{F}$ folgt daraus der Virialsatz:

$$\left\| \; \overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla V \cdot \vec{r}_i} \; \right\| \qquad (1)$$

Betrachten wir nun ein Teilchen in einer Zentralkraft $F(\vec{r}) = F(r)$ mit $V(\vec{r}) = V(r)$ folgt:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\vec{\nabla} V \vec{r}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r} \qquad (2)$$

Nebenbemerkung: Sei $V(r)$ eine homogene Funktion vom Grad n

$$\Rightarrow V(\alpha r) = \alpha^n V(r) \qquad \text{Beispiel: } V(r) = \frac{1}{r}$$

Differenziere nach α: $\qquad V(\alpha r) = \alpha^{-1} \cdot \frac{1}{r}$

$$\frac{d}{d\alpha} (V(\alpha r)) = \frac{d}{d\alpha} (\alpha^n) V(r) \qquad \Rightarrow \text{Grad: } n = -1$$

$$\frac{dV}{dr} \frac{d(\alpha r)}{d\alpha} = n \alpha^{n-1} V(r)$$

$$\frac{dV}{dr} r = n \alpha^{n-1} V(r)$$

$$\overset{\alpha = 1}{\Rightarrow} \underline{\underline{\frac{dV}{dr} r = n V(r)}}$$

Satz von Euler ↗ Vorkurs Serie 6

Sei V nun eine (homogene) Potenzfunktion: $V = a \cdot r^{n+1}$
$F = -a \cdot r^n$

Dann folgt: $\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1) \cdot V$

Mit dem Virialsatz (2) folgt: $\boxed{\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}}$

<u>Beispiele</u>:

Zentralkraftpotential: $F \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow n = -2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}}}$$

Harmonischer Oszillator: $F = -kx \Rightarrow n = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{T} = \bar{V}}}$$